2.5 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ανισότητα : Είναι μία σχέση μεταξύ δύο αριθμών που δεν είναι ίσοι μεταξύ τους

2.

Διάταξη δύο πραγματικών αριθμών που έχουμε παραστήσει με σημεία στον άξονα των πραγματικών αριθμών

Αν το σημείο που παριστάνει αριθμό α είναι αριστερότερα από το σημείο που παριστάνει αριθμό β, λέμε ότι ο α είναι μικρότερος του β και γράφουμε $\alpha < \beta$ ή $\beta > \alpha$, δηλαδή ο β είναι μεγαλύτερος του α

3.

Άμεσο συμπέρασμα :
– Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το 0
– Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το 0
– Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό

4.

Σύγκριση δύο πραγματικών αριθμών που δεν βλέπουμε στον άξονα

Για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν τα εξής

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta > 0$ και αντίστροφα

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$ και αντίστροφα

Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \beta = 0$ και αντίστροφα

5.

Διπλός συμβολισμός : Αν ο αριθμός α είναι μικρότερος ή ίσος του β, γράφουμε $\alpha \le \beta$ και διαβάζουμε α μικρότερος ή ίσος του β.

Αν ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος ή ίσος του β, γράφουμε $\alpha \ge \beta$ και διαβάζουμε α μεγαλύτερος ή ίσος του β .

6.

Ιδιότητα : Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

Με λόγια το παραπάνω :

Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε από τα μέλη μια ανισότητας τον ίδιο αριθμό προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς

7.

Ιδιότητα : Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Με λόγια το παραπάνω :
Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μια ανισότητας με τον ίδιο **θετικό** αριθμό προκύπτει ανισότητα **ίδιας** φοράς

8.

Ιδιότητα : Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ ή

Με λόγια το παραπάνω :
Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μια ανισότητας με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό προκύπτει ανισότητα **αντίθετης** φοράς

9.

Ιδιότητα : Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

Με λόγια το παραπάνω :
Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες με την ίδια φορά, προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς

10.

Ιδιότητα: Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί πραγματικοί και $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$

Με λόγια το παραπάνω :
Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν ίδια φορά και θετικά μέλη, προκύπτει ανισότητα ίδιας φοράς.

11.

Μεταβατική ιδιότητα : Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$

12.

Κάτι γνωστό από παλιά : Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$
με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$
Αποτέλεσμα του παραπάνω :
αν $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

13.

Ανίσωση : Μία ανισότητα που περιέχει έναν άγνωστο x λέγεται ανίσωση με έναν άγνωστο .

14.

Προσοχή : **Δεν** επιτρέπεται να **αφαιρούμε** ή να **διαιρούμε** ανισότητες κατά μέλη

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Απόδειξη ανισότητας : Για να αποδείξουμε μία ανισότητα, συνήθως την μετασχηματίζουμε κατάλληλα μέχρι να φτάσουμε σε κάτι που ισχύει.

2.

Πορεία επίλυσης ανίσωσης : Απαλοιφή παρονομαστών (εφ' όσον υπάρχουν)

Εκτέλεση πολλαπλασιασμών (εφ' όσον υπάρχουν)

Χωρισμός των γνωστών από τους αγνώστους

Αναγωγή ομοίων όρων
(πρόσθεση αγνώστων – πρόσθεση γνωστών)

Διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου
Δεν ξεχνάμε ότι αν ο συντελεστής είναι αρνητικός η ανίσωση αλλάζει φορά

Απλοποίηση αποτελέσματος

3.

Αδύνατη ανίσωση : Είναι η ανίσωση που δεν έχει λύση .
Π.χ Αδύνατη ανίσωση είναι η $0x < -2$

4.

Αόριστη ανίσωση : Είναι η ανίσωση που αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του αγνώστου.
Π.χ Αόριστη ανίσωση είναι η $0x > -2$

5.

Συναλήθευση ανισώσεων : Είναι ο προσδιορισμός των κοινών λύσεων δύο ή περισσότερων ανισώσεων.
Ο προσδιορισμός των κοινών λύσεων γίνεται με τη βοήθεια της παράστασης των λύσεων στον άξονα

6.

Διπλή ανίσωση : Είναι μία ανίσωση της μορφής $\alpha < \beta x < \gamma$

7.

Επίλυση διπλής ανίσωσης : Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και στο τέλος συναληθεύουμε.
Αν ο άγνωστος είναι μόνο στο μεσαίο μέλος, τότε μπορούμε να λύνουμε και τις δύο ανισώσεις μαζί

8.

Ειδική έρευνα : Αν θέλω να εξετάσω για ποιες τιμές κάποιου ή κάποιων γραμμάτων διαφορετικών από τον άγνωστο μία ανίσωση είναι αδύνατη ή αόριστη, αφού φέρω την ανίσωση στη μορφή $\alpha x < \beta$, στη συνέχεια απαιτώ

- για την περίπτωση της αδύνατης να είναι $\alpha = 0$ και $\beta < 0$
- για την περίπτωση της αόριστης να είναι $\alpha = 0$ και $\beta \geq 0$

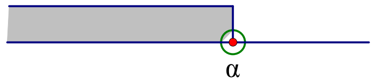
Ανάλογα ενεργούμε αν έχουμε την ανίσωση $\alpha x > \beta$

9 .

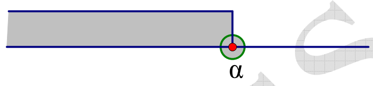
Παράσταση των λύσεων στην ευθεία των αριθμών

Λύνουμε την ανίσωση και σημειώνουμε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις που βρήκαμε .

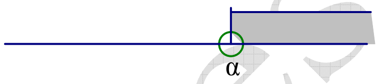
$x < \alpha$ τότε παριστάνουμε



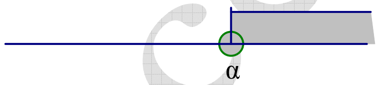
$x \leq \alpha$ τότε παριστάνουμε



$x > \alpha$ τότε παριστάνουμε



$x \geq \alpha$ τότε παριστάνουμε



Για την αόριστη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Αν $\alpha > \beta$ τότε $3\alpha > 3\beta$ Σ

β) Αν $\alpha > \beta$ τότε $-2\alpha > -2\beta$ Λ

γ) Αν $\alpha\beta > 0$ τότε οι αριθμοί α και β είναι θετικοί Λ

δ) Αν $\alpha\beta > 1$ τότε $\alpha > \dfrac{1}{\beta}$ Λ

ε) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ Λ

στ) $\alpha > -3$ και $x > y$ τότε $\alpha x > -3y$ Λ

ζ) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ Σ

η) αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha^2 > \beta^2$ Λ

θ) η ανίσωση $0x < 5$ είναι αδύνατη Λ

ι) Η ανίσωση $0x > -3$ αληθεύει για κάθε x Σ

Προτεινόμενη λύση

α) Σωστό αφού $3 > 0$

β) Λάθος αφού $-2 < 0$

γ) Λάθος αφού μπορεί να είναι και αρνητικοί

δ) Λάθος γιατί δεν ξέρουμε το πρόσημο του β

ε) Λάθος γιατί δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη

στ) Λάθος γιατί δεν ξέρουμε αν τα μέλη είναι θετικά

ζ) Σωστό από την θεωρία

η) Λάθος γιατί δεν ξέρουμε αν τα μέλη είναι θετικά

θ) Λάθος γιατί η ανίσωση αληθεύει για κάθε x αφού $0 < 5$

ι) Σωστό αφού το $0 > -3$

2.

Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά

α) Αν $\kappa < \lambda$ τότε $\kappa - \lambda$ …

β) Αν $(\alpha-1)^2 + (\beta+2)^2 = 0$ τότε α …. και β…..

γ) Αν $\alpha > 0$ και $\alpha\beta < 0$ τότε β….

δ) Αν $-2\kappa < -2\lambda$ τότε κ…λ

ε) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\frac{1}{2}\alpha \ldots \frac{1}{2}\beta$

Προτεινόμενη λύση

α) Αν $\kappa < \lambda$ τότε $\kappa - \lambda < 0$

β) Αν $(\alpha-1)^2 + (\beta+2)^2 = 0$ τότε $\alpha = 1$ και $\beta = -2$

γ) Αν $\alpha > 0$ και $\alpha\beta < 0$ τότε $\beta < 0$

δ) Αν $-2\kappa < -2\lambda$ τότε $\kappa > \lambda$

ε) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\beta$

3.

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξτε την σωστή απάντηση

α) Αν $\kappa\lambda < 0$ τότε

Α. $\kappa < 0$ Β. $\lambda < 0$ Γ. $\kappa < 0$ και $\lambda < 0$ Δ. κ , λ ετερόσημοι

β) Αν $x < 1$ από τις παρακάτω σχέσεις να βρείτε ποια δεν ισχύει

Α . $x < 2$ Β. $2x < 2$ Γ. $x - 4 < -3$ Δ. $x < 0$

γ) Αν $\alpha(\beta - 2) > 0$ και $\alpha < 0$ τότε

Α. $\beta > 0$ Β. $\beta = 2$ Γ. $\beta < 0$ Δ. $\beta > 2$ Ε. $\beta < 2$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\kappa\lambda < 0$ σημαίνει ότι οι αριθμοί κ , λ είναι ετερόσημοι. Σωστό το Δ

β)

Δεν ισχύει το Δ, διότι μπορεί $0 < x < 1$

γ)

$\alpha(\beta - 2) > 0$ σημαίνει ότι οι αριθμοί α και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι.

Και επειδή $\alpha < 0$ θα είναι και $\beta - 2 < 0$ άρα $\beta < 2$. Σωστό το Ε

4 .

Αν $2 < x < 3$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων

i) $A = (2-x)(3-x)(x-1)$

ii) $B = (1-x)(x-5)(2x - 1)$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 4

i)

$2 < x$ άρα $2-x < 0$

$x < 3$ άρα $3-x > 0$

$2 < x < 3$ άρα $2-1 < x-1 < 3-1$

$1 < x-1 < 2$

Επομένως $A < 0$ αφού μόνο ένας παράγοντας είναι αρνητικός

ii)

$2 < x < 3$ άρα $-2 > -x > -3$

$1-2 > 1-x > 1-3$

$-1 > 1-x > -2$ άρα $1-x < 0$

$2 < x < 3$ άρα $2-5 < x-5 < 3-5$

$-3 < x-5 < -2$ δηλαδή $x-5 < 0$

$2 < x < 3$ άρα $4 < 2x < 6$

$4-2 < 2x-1 < 6-1$

$2 < 2x-1 < 5$ δηλαδή $2x-1 > 0$

Επομένως $B > 0$ αφού δύο μόνο παράγοντες είναι αρνητικοί

5 .

Αν $x < 2y$, να συγκριθούν οι αριθμοί

α) $3(x-2y)$ και $4(x-2y)$ **β)** $2(3-y)$ και $3(-x+5) + 2x$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 4

α)

$3(x-2y) - 4(x-2y) = 3x-6y - 4x + 8y =$

$= 2y - x > 0$ λόγω της υπόθεσης

Άρα $3(x-2y) > 4(x-2y)$

β)

$2(3-y) - [3(-x+5) + 2x] = 6-2y - (-3x + 15 + 2x) =$

$= 6-2y + 3x - 15 - 2x =$

$= x - 2y - 9 < 0$ αφού $x - 2y < 0$ και $-9 < 0$

Άρα $2(3-y) < 3(-x+5) + 2x$

6.

Αν $x > y$ και $\alpha = 6x - 7\omega$, $\beta = 6y - 7\omega$ δείξτε ότι $\alpha > \beta$

Προτεινόμενη λύση

$\alpha - \beta = 6x - 7\omega - (6y - 7\omega) = 6x - 7\omega - 6y + 7\omega =$

$= 6(x - y) > 0$ αφού $6 > 0$ και $x - y > 0$

Άρα $\alpha > \beta$

7.

i) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$, δείξτε ότι $\alpha - \gamma > \beta - \delta$

ii) Αν $\beta + \gamma > \alpha$ και $\gamma + \alpha > \beta$, δείξτε ότι $\gamma > 0$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία - ιδιότητες

i)

$\alpha > \beta$ **(1)**

$\gamma < \delta$ οπότε $-\gamma > -\delta$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$

ii)

$\beta + \gamma > \alpha$ και $\gamma + \alpha > \beta$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές βρίσκουμε $\beta + 2\gamma + \alpha > \alpha + \beta$

$2\gamma > 0$

$\gamma > 0$

8.

i) Αν $\alpha > -3$, δείξτε ότι $6 + 2\alpha > 3 + \alpha$.

ii) Αν $x < y < \omega$, δείξτε ότι $(x - \omega)(y - \omega)(y - x) > 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αρκεί να δειχθεί ότι $6 + 2\alpha > 3 + \alpha$

$2\alpha - \alpha > 3 - 6$

$\alpha > -3$ που ισχύει από την υπόθεση

ii)

$x < \omega$ άρα $x - \omega < 0$

$y < \omega$ άρα $y - \omega < 0$

$y > x$ άρα $y - x > 0$

Επομένως $(x - \omega)(y - \omega)(y - x) > 0$

9.

Αν $0 < \alpha < \beta$, να διατάξετε τους αριθμούς $\dfrac{\beta}{\alpha}$, 1 , $\dfrac{\alpha}{\beta}$, 0 από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

Προτεινόμενη λύση

$0 < \alpha < \beta$ άρα $0 < \dfrac{\alpha}{\beta} < 1$ και $\dfrac{\beta}{\alpha} > 1$ οπότε $0 < \dfrac{\alpha}{\beta} < 1 < \dfrac{\beta}{\alpha}$

10 .

Αν $2 < x < 5$ και $-3 < y < 4$, να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων

i) $-x$ **ii)** $x + 3$ **iii)** $-y + 4$ **iv)** $x + y$ **v)** $x - y$ **vi)** $2x - 3y + 6$

Προτεινόμενη λύση

i)

$2 < x < 5$ άρα $-2 > -x > -5$

ii)

$2 < x < 5$ άρα $2 + 3 < x + 3 < 5 + 3$ επομένως $5 < x + 3 < 8$

iii)

$-3 < y < 4$ άρα $3 > -y > -4$ οπότε $3 + 4 > -y + 4 > -4 + 4$ επομένως

$7 > -y + 4 > 0$

iv)

$2 < x < 5$ και $-3 < y < 4$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $-1 < x + y < 9$

v)

$2 < x < 5$ **(1)**

$-3 < y < 4$ άρα $3 > -y > -4$ άρα $-4 < -y < 3$ **(2)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε $-2 < x - y < 8$

vi)

$2 < x < 5$ άρα $4 < 2x < 10$ **(3)**

$-3 < y < 4$ άρα $9 > -3y > -12$ δηλαδή $-12 < -3y < 9$ **(4)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) βρίσκουμε $-8 < 2x - 3y < 19$

$-8 + 6 < 2x - 3y + 6 < 19 + 6$

$-2 < 2x - 3y + 6 < 25$

11.

i) Αν $(x - 2y)^2 + (y - 3)^2 = 0$, να βρείτε τις τιμές των x και y

ii) Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 8\beta - 12\gamma + 53 = 0$, δείξτε ότι $\alpha = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = 6$

Προτεινόμενη λύση

i)

$(x - 2y)^2 + (y - 3)^2 = 0$ άρα $x - 2y = 0$ και $y - 3 = 0$

$x = 2y$ και $y = 3$

$x = 6$ και $y = 3$

Θεωρία 12

ii)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 8\beta - 12\gamma + 53 = 0 \quad \text{άρα}$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + (\beta^2 + 8\beta + 16) + (\gamma^2 - 12\gamma + 36) = 0$$

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta + 4)^2 + (\gamma - 6)^2 = 0 \quad \text{άρα}$$

$$\alpha - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \beta + 4 = 0 \quad \text{και} \quad \gamma - 6 = 0$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 6$$

12.

Να αποδείξετε ότι $2x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 12

Αρκεί να ισχύει $2x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$x^2 + x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$x^2 + (x-y)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει

Η ισότητα ισχύει όταν $x = 0$ και $x - y = 0$ δηλαδή

$x = 0$ και $x = y$

$x = y = 0$

13 .

i) Αν $x, y > 0$, δείξτε ότι $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$

ii) Αν $x > 0$ και $y < 0$, δείξτε ότι $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \leq -2$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού $x, y > 0$ είναι $xy > 0$

Αρκεί να ισχύει $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$

$$xy\,\frac{x}{y} + xy\,\frac{y}{x} \geq 2\,xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$(x-y)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει

ii)

Αφού $x > 0$ και $y < 0$ είναι $xy < 0$

Αρκεί να ισχύει $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \leq -2$

$$xy\,\frac{x}{y} + xy\,\frac{y}{x} \geq -2\,xy$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \geq 0$$

$(x+y)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει

14.

Να αποδείξετε ότι

i) $\alpha^2 + 9) \geq 6\alpha$ **ii)** $2(x^2 + y^2) \geq (x + \psi)^2$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αρκεί να δειχθεί ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$

$\alpha^2 + 9 - 6\alpha \geq 0$

$(\alpha - 3)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει

ii)

Αρκεί να δειχθεί ότι $2(x^2 + y^2) \geq (x + \psi)^2$

$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + y^2 + 2xy$

$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$(x - y)^2 \geq 0$ η οποία ισχύει

15.

Να λυθούν οι ανισώσεις και να παρασταθούν οι λύσεις στην ευθεία των αριθμών

α) $5(x-2) > 3x + 1$ **β)** $7x - 3 < 3(x-2) + 2(3-x)$.

γ) $\frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3} < \frac{x-1}{2} - 6$ **δ)** $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x}{4} + \frac{x+2}{12}$.

Σχόλιο 2-9

Προτεινόμενη λύση

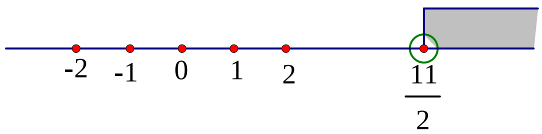
α)

$5(x-2) > 3x + 1$ άρα $5x - 10 > 3x + 1$

$5x - 3x > 10 + 1$

$2x > 11$

$x > \frac{11}{2}$



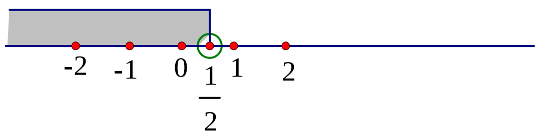
β)

$7x - 3 < 3(x-2) + 2(3-x)$ άρα $7x - 3 < 3x - 6 + 6 - 2x$

$7x - 3x + 2x < -6 + 6 + 3$

$6x < 3$

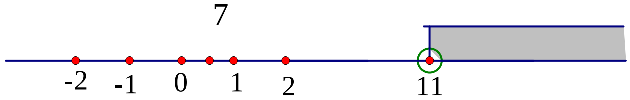
$x < \frac{1}{2}$



γ)

$$\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}<\frac{x-1}{2}-6 \quad \text{άρα} \quad 12\cdot\frac{x-3}{4}-12\cdot\frac{x-2}{3}<12\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot 12$$

$$3(x-3)\ -4(x-2)<6(x-1)\ -72$$
$$3x-9\ -4x+8\ <6x-6\ -72$$
$$3x-4x\ -6x\ <9-6\ -72-8$$
$$-7x\ <\ -77$$
$$7x>77$$
$$x>\frac{77}{7}=11$$



δ)

$$\frac{x+2}{3}-\frac{1}{2}\ <\ \frac{x}{4}+\frac{x+2}{12} \quad \text{άρα} \quad 12\cdot\frac{x+2}{3}-12\cdot\frac{1}{2}<12\cdot\frac{x}{4}+12\cdot\frac{x+2}{12}$$

$$4(x+2)\ -6<3x+(\ x+2)$$
$$4x+8\ -6<3x+x+2$$
$$4x\ -3x-x<2+6\ -8$$
$$0x<0 \quad \text{αδύνατη ανίσωση}$$

16.

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων.

α) $4(x+4)+x+1>2(4x-5)$ και $6(x-11)\leq 4(x-2)\ -3(x+1)$

β) $3(x+1)+2x>x+2-\ (4x-1)$ και $-2(x-3)+5x\geq 3(x-1)+x-1$.

γ) $2(3x-4)\ -8>5x+1-3(6x-7)$ και $\frac{2x-3}{6}-\frac{x+1}{2}<x-\frac{3x-1}{4}$

δ) $x-7<1+2x$ και $2x-6<3x+4$ και $-9-2x\geq 3x-18$

Προτεινόμενη λύση

α)

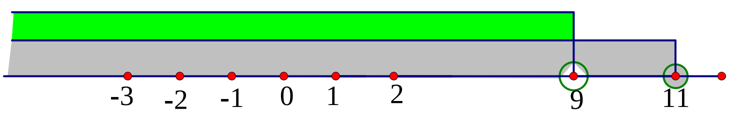
$4(x+4)+x+1>2(4x-5)$ και $6(x-11)\leq 4(x-2)\ -3(x+1)$ άρα

$4(x+4)+x+1>2(4x-5)$ και $6x-66\leq 4x-8\ -3x\ -3$

$4x+16+x+1>8x-10$ και $5x\leq 55$

$-3x>\ -27$ και $x\leq 11$

$x<9$ και $x\leq 11$



Από τον άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι $x<9$

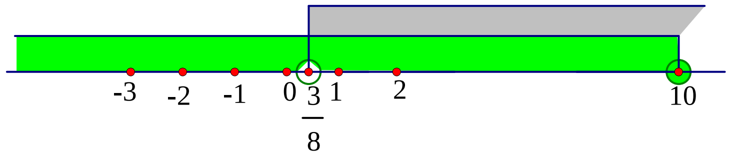
β)

$3(x+1)+2x > x+2-(4x-1)$ και $-2(x-3)+5x \geq 3(x-1)+x-1.$

$3x+3+2x > x+2\ -4x+4$ και $-2x+6+5x \geq 3x-3+x-1$

$8x\ > 3$ και $-x\ \geq -10$

$x > \dfrac{3}{8}$ και $x \leq 10$



Από τον άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι $\dfrac{3}{8} < x \leq 10$

γ)

$2(3x-4)\ -8 > 5x+1-3(6x-7)$ και $\dfrac{2x-3}{6} - \dfrac{x+1}{2} < x - \dfrac{3x-1}{4}$

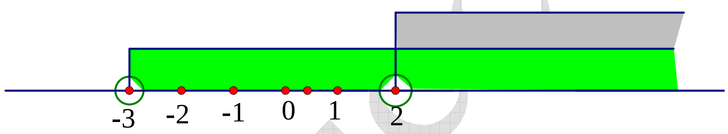
$6x-8\ -8 > 5x+1-18x+21$ και $12 \cdot \dfrac{2x-3}{6} - 12 \cdot \dfrac{x+1}{2} < 12x - 12 \cdot \dfrac{3x-1}{4}$

$19x > 38$ και $2(\ 2x-3)\ -6(\ x+1) < 12x\ -3(\ 3x-1)$

$x > 2$ και $4x-6\ -6x\ -6 < 12x\ -9x+3$

$x > 2$ και $-5x < 15$

$x > 2$ και $x > -3$



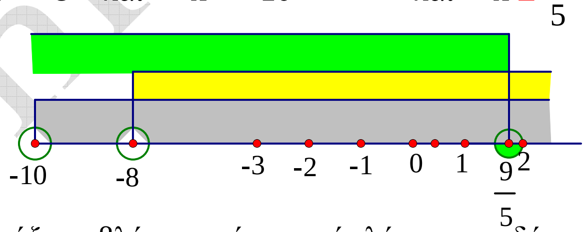
Από τον άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι $x > 2$

δ)

$x-7 < 1+2x$ και $2x-6 < 3x+4$ και $-9-2x \geq 3x-18$

$-x < 8$ και $-x < 10$ και $-5x \geq -9$

$x > -8$ και $x > -10$ και $x \leq \dfrac{9}{5}$



Από τον άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι $-8 < x \leq \dfrac{9}{5}$

17.

Να βρείτε ποιές από τις παρακάτω ανισώσεις είναι αδύνατες και ποιες αόριστες.

α) $0x > -1$ β) $0x > 1$ γ) $0x < -2$ δ) $0x < 0$ ε) $0x \geq 0$

Σχόλια 3-4

Απάντηση

α) αόριστη β) αδύνατη γ) αδύνατη δ) αδύνατη ε) αόριστη

18.

Να λυθούν οι ανισώσεις.

α) $-2 < 2x - 8 \leq 12$ **β)** $-5 \leq \frac{1}{2}x - 3 < 10$ **γ)** $\frac{3}{4} < \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x \leq \frac{9}{4}$

Προτεινόμενη λύση

α)

Σχόλιο 7

$-2 < 2x - 8 \leq 12$ άρα $-2 + 8 < 2x \leq 12 + 8$

$6 < 2x \leq 20$

$3 < x \leq 10$

β)

$-5 \leq \frac{1}{2}x - 3 < 10$ άρα $-5 + 3 \leq \frac{1}{2}x < 10 + 3$

$-2 \leq \frac{1}{2}x < 13$

$-4 \leq x < 26$

γ)

$\frac{3}{4} < \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x \leq \frac{9}{4}$ άρα $12 \cdot \frac{3}{4} < 12 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{5}{6}x \leq 12 \cdot \frac{9}{4}$

$9 < 8 - 10x \leq 27$

$9 - 8 < -10x \leq 27 - 8$

$1 < -10x \leq 19$

$-\frac{1}{10} > x \geq -\frac{19}{10}$

19.

Να βρεθεί ο μικρότερος φυσικός αριθμός του οποίου το εξαπλάσιο ελαττωμένο κατά 5 είναι μεγαλύτερο από το 80.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x ο ζητούμενος φυσικός.

Τότε, κατά το πρόβλημα πρέπει $6x - 5 > 80$ άρα $6x > 85$ άρα $x > \frac{85}{6} \approx 14,1$

Επομένως ο μικρότερος φυσικός που ικανοποιεί το πρόβλημα είναι το 15

20.

Να βρεθούν οι τρείς μικρότεροι ακέραιοι που είναι λύσεις της ανίσωσης
$0,12 < 0,2x - 70$

Προτεινόμενη λύση

$0,12 < 0,2x - 70$ άρα $0,2x > 70,12$ άρα $x > 350,6$

Συνεπώς οι τρεις μικρότεροι ακέραιοι που ικανοποιούν το πρόβλημα είναι οι
351 , 352 , 353

21.

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος φυσικός του οποίου το επταπλάσιο ελαττωμένο κατά 4 είναι μικρότερο του 60 .

Προτεινόμενη λύση

Έστω x ο ζητούμενος φυσικός.

Τότε, κατά το πρόβλημα πρέπει $7x - 4 < 60$ άρα $7x < 64$ άρα $x < \frac{64}{7} \approx 9,1$

Επομένως ο μεγαλύτερος φυσικός που ικανοποιεί το πρόβλημα είναι το 9

22.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν κήπο με σχήμα ορθογωνίου και εμβαδό μεταξύ $31m^2$ και $39m^2$. Αν το πλάτος του κήπου είναι 4m, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών θα περιέχεται το μήκος του κήπου.

Προτεινόμενη λύση

Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου με διαστάσεις x και y είναι ίσο με $E = xy$.

Αν x είναι το μήκος του κήπου, τότε κατά το πρόβλημα πρέπει $31 < 4x < 39$

$$\frac{31}{4} < x < \frac{39}{4}$$

$$7,75 < x < 9,75$$

Άρα το μήκος θα περιέχεται μεταξύ 7,75 και 9, 75

23.

Ένας όμιλος τένις προσφέρει στα μέλη του δύο τρόπους για να κάνουν χρήση των γηπέδων του.

$1^{ος}$ Να πληρώνουν για κάθε ώρα παιχνιδιού 2 €.

$2^{ος}$ Να πληρώνουν ετήσια συνδρομή 25 € και για κάθε ώρα παιχνιδιού 1,5 €.

Πόσες ώρες πρέπει να παίξει κάποιος, ώστε να τον συμφέρει ο $2^{ος}$ τρόπος;

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι ένα μέλος παίζει x ώρες τένις.

Τότε με βάση τον $1^{ο}$ τρόπο θα πληρώσει $2x$

και με βάση τον $2^{ο}$ θα πληρώσει $25 + 1,5x$

Θέλουμε να ισχύει $25 + 1,5x < 2x$ άρα $25 < 0,5x$ άρα $x > \frac{25}{0,5} = 50$

Επομένως ο $2^{ος}$ τρόπος συμφέρει όταν κάποιος παίζει πάνω από 50 ώρες